SF1633 – Övning 9

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-10-02

Problem 12.5.12. Lös Laplaces ekvation på den semioändliga rektangeln $R = \{(x, y) : x \in [0, \pi], y \in [0, \infty)\}$.

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in R^o \tag{1}$$
$$u_x = 0, \quad (x, y) \in \{(x, y) : x \in \{0, \pi\}\} \cap R \tag{2}$$
$$u(x, 0) = f(x) \tag{3}$$
$$\lim_{y\to\infty} |u(x, y)| < \infty \tag{4}$$

Lösning. Vi söker som vanligt lösningar med hjälp av separation av variabler, genom att anta att $u(x, y) = X(x)Y(y)$ kan vi skriva om (1) till två ordinär differentialekvaitoner

$$X'' = \lambda X \tag{5}$$
$$Y'' = -\lambda Y. \tag{6}$$

Vi har nu några olika fall att testa, motsvarande om $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ eller $\lambda = 0$. Vi börjar med $\lambda = 0$.
Fall 1: $\lambda = 0$, vi har då $X = c_1x + c_2$, $Y = c_3y + c_4$, eftersom $X'(0) = X'(\pi) = 0$ måste vi ta $c_1 = 0$, (4) leder till $c_3 = 0$ detta fall ger alltså någon konstant.
Fall 2: $\lambda = \alpha^2 > 0$, vi har då lösningarna $X = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}, Y = c_3 \cos \alpha y + c_4 \sin \alpha y$. Eftersom $X(0) = X(\pi) = 0$ måste vi ta både $c_1 = 0$ och $c_2 = 0$, vi kan med andra ord förkasta detta fall.
Fall 3: $\lambda = -\alpha^2 < 0$, detta fall ger lösningarna $X = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x, Y = c_3e^{\alpha y} + c_4e^{-\alpha y}$. (2) leder till att vi måste ta $b = 0$ och $\alpha = n \in \mathbb{N}$. (4) leder till $c_3 = 0$.
Vår totala lösning måste alltså vara på formen

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n e^{-ny} \cos nx. \tag{7}$$

Vi inser också att vid $y = 0$ måste (7) vara cosinusserien till $f(x)$, det vill säga

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \tag{8}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \tag{9}$$

Vilket är vår fullständiga lösning. □

Problem 7.1.15. Beräkna från definitionen $\tilde{f}(s)$ när $f(t) = e^{-t}\sin t$.

Lösning. Per definition har vi

$$\tilde{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{10}$$

I det här fallet har vi med hjälp av partiell integration

$$\tilde{f}(s) = \left| \frac{-e^{-t(s+1)}((s+1)\sin t + \cos t)}{s^2 + 2s + 2} \right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}. \tag{11}$$

Definierat för all $s > -1$. □

Problem 7.1.37. Finn laplacetransformen till $f(t) = \sin 2t \cos 2t$ genom att först använda någon trigonometrisk identitet.

Lösning. Den trigonometriska identiteten som bör användas är $2\sin x \cos x = \sin 2x$, tillämpa denna och kolla formelsamlingen över laplacetransformer så finner vi

$$\tilde{f}(s) = \frac{2}{s^2 + 16}, \quad s > 0. \tag{12}$$

□