SF1633 – Övning 8

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-09-28

Problem 12.1.3. Lös följande partiella differentialekvation om möjligt med hjälp av separation av variabler

$$u_x + u_y = u. \tag{1}$$

Lösning. Vi söker lösningar på formen $u(x, y) = X(x)Y(y)$, då tar (1) formen

$$X'Y + XY' = XY. \tag{2}$$

Vi vi separerar variablerna och får

$$\frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y} = \lambda. \tag{3}$$

Där λ är någon konstant, vi delar nu upp (3) i två ordinära differentialekvationer

$$X' = \lambda X \tag{4}$$

$$Y' = (1 - \lambda)Y. \tag{5}$$

Vi ser enkelt att (4) har lösningen $X = c_1 e^{\lambda x}$ och (5) har lösning $Y = c_2 e^{(1-\lambda)y}$. Vi får då att u är på formen

$$u(x, y) = ce^{\lambda x+(1-\lambda)y}. \tag{6}$$

□

Problem 12.1.7. Lös följande partiella differentialekvation om möjligt med hjälp av separation av variabler

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Lösning. Vi säker precis som innan lösningar på formen $u = XY$, (7) tar då formen

$$X''Y + X'Y' + XY'' = 0. \tag{7}$$

Vi ser dock nu att (8) ej är separabel, så vi får ge oss här, jag kan dock berätta att alla linjära funktioner uppfyller (7), dvs vi kan ta $u = c_1 x + c_2 y + c_3$. □

Problem 12.2.3. Ställ upp ett randvärdesproblem för temperaturen $u(x,t)$ på ten stång som sammanfaller med intervallet $[0,L]$ där den ena änden hålls konstant vid temperaturen u_0 och den andra vid u_1, från början är temperaturen 0 i $(0,L)$.

Lösning. Detta är ett fall för den klassiska endimensionella värmeekvationen, den har formen

$$ku_{xx} = u_t. \tag{8}$$

Våra randvärden är givna som $u(0,t) = u_0, u(L,t) = u_1$ och $u_(x,0) = 0$ för $x \in (0,L)$. Vi kan sammanfatta vårt randvärdesproblem som

$$\begin{gathered} ku_{xx} = u_t, \qquad t > 0 \\ u(0,t) = u_0, u(L,t) = u_1 \\ u(x,0) = 0, \qquad x \in (0,L). \end{gathered}$$

□

Problem 12.3.1. Lös värmeekvationen under antagandet att staven är av längd L.

$$\begin{gathered} ku_{xx} = u_t \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases}. \end{gathered}$$

Lösning. Vi fortsätter söka lösningar på formen $u = XT$, det resulterar i de ordinära differentialekvationerna

$$X'' = \lambda X \tag{9}$$

$$T' = k\lambda T. \tag{10}$$

Oavsett val av λ kommer (10) att ha lösning $T = e^{k\lambda t}$. För $\lambda \geq 0$ kommer innebära $X = ce^{\sqrt{\lambda}t}$, dessa lösningar har dock inte möjlighet att uppfylla randvilkoren $X(0) = X(L) = 0$ så vida vi inte väljer $c = 0$. För negativa λ har vi lösningen $X = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$. För att uppfylla $X(0) = 0$ måste vi ta $c_1 = 0$ och för att uppfylla $X(L) = 0$ måste vi ha $\sqrt{-\lambda} = n\pi/L$. Det leder till att vi har lösningar till PDE:n på formen

$$u_n(x,t) = b_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{11}$$

Vi tar alltså u på formen $\sum u_n$, och noterar att vid $t = 0$ är detta en fourierserie till $u(x,0)$. Vi utvidgar randvilkoret

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases} \tag{12}$$

på ett udda sätt. Vi beräknar våra koefficienter b_n

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\left[\frac{-L\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n\pi}\right]_0^{L/2}$$
$$= \frac{2(1-\cos\frac{n\pi}{2})}{n\pi}.$$

Vi har alltså till sist lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}\frac{2(1-\cos\frac{n\pi}{2})}{n\pi}e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{13}$$

□