SF1633 – Övning 7

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-09-25

Inre produktrum

Jag vill börja med att berätta lite om det som kallas L^2-teori och inre produktrum, om ni läser **SF1632** kommer dessa ämnen behandlas djupare. I övning 3 berättade jag kort om hur vi kan behandla funktioner definierade på något intervall I som vektorer i ett vektor rum, vi definierade linjärt beroende på ett analogt sätt som i algebran. Vi vill nu försöka hitta något som liknar det viktiga konceptet skalärprodukt. Vi börjar med att visa att skalärprodukten som den definieras i $\mathbb{R}^n$ inte är sofistikerad nog för att kunna direkt användas i $\mathbb{C}^n$. I antag att $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, vi definierar beloppet av $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ som $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}$, och säger att längden av vektorn är samma sak som beloppet. Om vi testar samma definition av längd på vektorn $\boldsymbol{v} = (1, i) \in \mathbb{C}^2$ får vi att $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2 + i^2} = 0$. Det betyder alltså att vektorn $\boldsymbol{v}$ skulle ha längd 0, och det verkar ju absurt, vi behöver istället en bättre definition. Vi introducerar, för ett komplext vektorrum begreppet inre produkt. Om vi har ett vektorrum V med $u, v \in V$ är den inre produkten en funktion $\langle u, v\rangle$ har följande egenskaper

- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ (Hermitisk symmetri)
- $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, q\rangle + \beta\langle v, w\rangle$ (Linjäritet i första argumentet)
- $\langle u, u\rangle \geq 0$
- $\langle u, u\rangle = 0 \implies u = 0$.

Vi väljer alltså att definiera den inre produkten $\langle u, v\rangle$ på $\mathbb{C}^n$ som $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}$ (Kolla gärna att denna definition stämmer uppfyller kraven ställda på en inre produkt). Vad var poängen med att jag berättar allt det här för er kanske ni undrar? Det är för att vi ska definiera en inre produkt på rummet av funktioner definierade på intervallet $[a, b]$. Vi definierar rummet $L^2([a, b])$ som mängden funktioner definierade på $[a, b]$ som uppfyller

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Den inre produkten till $L^2([a, b])$ definierar vi som

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx. \tag{1}$$

Notera att om f, g är reellvärda funktioner behövs inte konjugattecknet. Vi är nu redo att definiera konceptet ortogonala funktioner, i $\mathbb{R}^n$ definierar två vektorer u, v som ortogonala om $u \cdot v = 0$, vi säger att två funktioner f, g ortogonala i $L^2([a, b])$ om $\langle f, g\rangle = 0$. Av särskilt intresse är att vi precis som i $\mathbb{R}^n$ kan använda Gram-Schmidt för att projicera funktioner på underrum av $L^2([a, b])$.

Vad är en Fourierserie?

Sats 1. *Mängden* $\{\cos nx, \sin nx\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([-\pi, \pi])$ *är en ortogonal mängd.*

Bevis. Låt $n, m \in \mathbb{N}$ med $n \neq m$, vi beräknar $\langle \cos nx, \cos mx\rangle$ och övriga intressanta inre produkter

$$\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\, dx = 0 \tag{2}$$

$$\langle \cos nx, \sin nx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx = 0 \tag{3}$$

$$\langle \cos nx, \sin mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m-n)x) + \sin((n+m)x)\, dx = 0 \tag{4}$$

$$\langle \sin nx, \sin mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) - \cos((n+m)x)\, dx = 0. \tag{5}$$

□

Det som är trevligt med en ortogonal mängd är att det är mycket lätt att göra projektioner på det underrum som mängden spänner upp. Låt $V_N \subset L^2([-\pi, \pi)]$ vara det underrum som spänns upp av de trigonometriska polynomen av grad $\leq N$, vi kan då projicera vilken funktion $f \in L^2([-\pi, \pi])$ på V_N med formeln

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{6}$$

där

$$a_n = \frac{\langle f, \cos nx\rangle}{\langle \cos nx, \cos nx\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad \text{och} \tag{7}$$

$$b_n = \frac{\langle f, \sin nx\rangle}{\langle \sin nx, \sin nx\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad \text{och} \tag{8}$$

$$a_0 = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \tag{9}$$

I **SF1632** kommer ni att få bevisa följande sats

Sats 2. *För varje givet* $\varepsilon > 0$ *och varje givet* $f \in L^2([-\pi, \pi])$ *existerar det* N *sådant att det existerar* $v \in V_N$ *som uppfyller* $\langle f - v, f - v \rangle < \varepsilon$.

När vi låter $N \to \infty$ konvergerar alltså (6) mot funktionen f, vi kallar serien för *Fourierserien* till f.

Problem 11.2.5. Bestäm fourierserien till

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{när } x \in (-\pi, 0) \\ x^2 & \text{när } x \in [0, \pi). \end{cases} \tag{10}$$

Bestäm också det värde serien konvergerar mot vid de diskontiuiteter f har.

Lösning. Vi ser "enkelt" att $a_0 = \pi^2/6$ vi beräknar

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx dx = \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin nx dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi} - \frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

Vi får alltså

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx + \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi} - \frac{\pi(-1)^n}{n}\right) \sin nx. \tag{11}$$

Eftersom vi vet att fourierserien till f alltid konvergerar till $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ har vi att vid $x = 2n\pi$ konvergerar serien till $\pi^2/2$. □

Problem 11.2.15. Bestäm fourierserien till $f(x) = e^x$ på $(-\pi, \pi)$.

Lösning. Vi börjar med att beräkna $a_0 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$. Vi beräknar a_n och b_n med hjälp av partiell integration

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)} \tag{12}$$

$$b_n = \frac{n(-1)^{n+1}}{\pi(n^2+1)} \tag{13}$$

Vi får alltså

$$f(x) \sim \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)} \cos nx + \frac{n(-1)^{n+1}}{\pi(n^2+1)} \sin nx. \tag{14}$$

□

Problem 11.2.19. Använd resultatet från **11.2.5** för att visa att

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \tag{15}$$

och

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - ... \tag{16}$$

Lösning. Vi visar (15) genom att evaluera serien (11) vid $x = \pi$, vi får då

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \implies \tag{17}$$

$$\frac{2\pi^2}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \implies \tag{18}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{19}$$

Vilket var det vi skulle visa. För att visa (16) evaluerar vi serien vid $x = 0$, vi får då

$$0 = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \implies \tag{20}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}. \tag{21}$$

Vilket var det som skulle visas. □

Problem 11.3.46. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + 12x = f(t) \tag{22}$$

där $f(t)$ är den jämna, periodiska, utvidgningen av

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{när } t \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 - t & \text{när } t \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \tag{23}$$

Lösning. Eftersom f är jämn kommer vi att arbeta med en cosinusserie. Vi antar att vi har en lösning på formen $x(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi t)$. Om vi deriverar två gånger och sätter in i (22) får vi då

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(12 - n^2\pi^2\right)\cos(2n\pi t) = f(t). \tag{24}$$

Beräknar vi cosinusserien till $f \sim b_0/2 + \sum b_n \cos(2n\pi t)$ får vi då

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 4\int_0^{1/2} t dt = \frac{1}{2} \\
b_n &= 4\int_0^{1/2} t\cos(2n\pi t) dt = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}
\end{aligned}
$$

Detta ger upphov till $a_0 = b_0$ och $a_n = \frac{b_n}{12 - n^2\pi^2}$ vi har alltså en lösning

$$
x(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2 (12 - \pi^2 n^2)} \cos(2n\pi t). \tag{25}
$$

$\square$