SF1633 – Övning 6

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-09-20

Problem 10.2.2. Diskutera hur systemet kommer bete sig i en omgivning kring $(0, 0)$

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \tag{1}$$

som har lösning

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Lösning. Vi ser att båda termerna kommer vilja växa obegränsat när $t \to \infty$. Vi har alltså en instabil nod. $\square$

Problem 10.2.7. Diskutera hur systemet kommer bete sig i en omgivning kring $(0, 0)$

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \tag{2}$$

som har lösning

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Lösning. Vi analyserar med hjälp av spåret τ och determinanten Δ av matrisen. $\tau = 0, \Delta = -1$ leder till att vi har en sadelpunkt (se figur 10.2.12 i kursboken). Alternativt kan vi resonera att den ena termen växer obegränsat medan den andra går mot noll. $\square$

Problem 10.2.13. Med hjälp av spår och determinant, och figur 10.2.12 i kursboken, klassificera den kritiska punkten (0,0) till systemet

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-3}{2}x + \frac{1}{4}y \\ y' &= -x - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

Lösning. Matrisen för systemet är $\begin{pmatrix} -3/2 & 1/4 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$ som har spår $\tau = -2$ och determinant $\Delta = 1$. Eftersom $\tau^2 - 4\Delta = 0$ och $\tau < 0$ har vi en degenererad stabil nod. $\square$

Problem 10.3.2. När ett system uttrycks i polära koordinater tar det formen

$$r' = \alpha r(5 - r), \qquad \theta' = -1. \tag{3}$$

Visa att (0,0) är asymptotiskt stabil om och bara om $\alpha < 0$.

Lösning. Per definition är $p = (0,0)$ en stabil kritisk punkt till systemet om det existerar någon omgivning $N(p,\delta)$, $\delta > 0$ sådan att för alla begynnelsevilkor $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0 \in n(p,\delta)$ innebär det lösningskurvan kommer röra sig mot $p = (0,0)$. Detta händer om r minskar med tiden, det vill säga $r' < 0$. Antag att vi tar $\boldsymbol{X}_0$ på cirkeln med radie $0 < \delta_1 < \delta \leq 5$ betecknat $C(p,\delta_1)$. Då har vi $r' = \alpha\delta_1(5-\delta_1)$, eftersom alla faktorer (utom α) nödvändigtvis är positiva måste $\alpha < 0$ för att vi ska ha (0,0) stabil. □

Problem 10.3.14. Klassificera eventuella kritiska punkter till följande system

$$x' = 2x - y^2, \quad y' = xy - y \tag{4}$$

Lösning. Vi börjar med att söka kritiska punkter, dvs. rötter till (4). En krisisk punkt är $\boldsymbol{X}_1 = (1, \sqrt{2})$ och en enda andra är $\boldsymbol{X}_2 = (1, -\sqrt{2})$, till sist har vi $\boldsymbol{X}_3 = (0,0)$. Vi definierar nu $\boldsymbol{F}(x,y) = (2x - y^2, xy - y)$. Vid linjärisering använder vi oss av $\boldsymbol{F}$'s Jacobimatris

$$J_{\boldsymbol{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & y \\ -2y & x-1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Vi behöver nu beräkna Jacobimatrisens determinanter och spår vid våra kritiska punkter. Vi ser att spåret är $\tau = x + 1$ och determinanten $\Delta = y^2 + 2x - 2$. Vid insättning av $\boldsymbol{X}_1$ får vi $\tau = 2$ och $\Delta = 2$, vi kommer alltså ha en instabil spiral. Vi får exakt samma analys vid insättning av $\boldsymbol{X}_2$. Vid insättning av $\boldsymbol{X}_3$ får vi $\tau = 1$ och $\Delta = -2$, detta leder alltså till en sadelpunkt. □

Problem 10.3.31. Använd fasplansmetoden för att visa att (0,0) är center till den icke-linjära andra ordningens differentialekvation

$$x'' + 2x^3 = 0$$

Lösning. Vi låter $y = x'$ vi får då $y' = -2x^3$, med fasplansmetoden får vi $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{-2x^3}{y}$. Denna ekvation är separabel och vi får om vi integrar $y^2 = c - x^4$. Om $y = 0$ har vi alltså $x^4 = c$, vi har också att för varje x-värde finns det två tillhörande y-värden, om vi tar $c = 0$ måste vi alltså ha att (0,0) är center. □