SF1633 – Övning 5

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-09-19

Problem 8.3.17. Använd variation av parametrar för att lösa det inhomogena systemet

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \tag{1}$$

Lösning. Den första matrisen i (1) har egenvärden $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = (2,1)^T, \boldsymbol{v}_2 = (1,1)^T$. Vi har alltså lösningarna

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{v}_1 e^t \tag{2}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{v}_2 e^{2t} \tag{3}$$

till den associerade homogena ekvationen. För att använda variation av parametrar för att hitta partikulärlösning till (1) konstruerar vi matrisen $\Phi = \left(\boldsymbol{X}_1 \middle| \boldsymbol{X}_2\right)$, det vill säga

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} e^t. \tag{4}$$

Inverterar vi får vi

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{5}$$

Det kommer finnas en partikulärlösning till (1) på formen

$$\boldsymbol{X}_p = \Phi \int \Phi^{-1} \boldsymbol{F} dt \tag{6}$$

där $\boldsymbol{F} = (e^t, -e^t)^T$. Vi beräknar

$$\int \Phi^{-1} \boldsymbol{F} dt = \int \begin{pmatrix} 1+1 \\ -e^{-t} - 2e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2t \\ 3e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Vi får då

$$\boldsymbol{X}_p = \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Och den allmänna lösningen till (1) är

$$\boldsymbol{X} = c_1 \boldsymbol{X}_1 + c_2 \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_p. \tag{9}$$

□

Problem 8.3.33. Lös begynnelsevärdesprobelemt

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Lösning. Matrisen i (10) har egenvärden $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ med egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1), \boldsymbol{v}_2 = (1, 1)$. Vi skriver upp får Φ matris

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ -e^{4t} & e^{2t} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Inverterar vi får vi

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-4t} & -e^{-4t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Vi gör som innan och beräknar

$$\boldsymbol{Q} = \int \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - 2 \\ 2 + 2e^{2t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -e^{-2t} - 2t \\ 2t + e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Vi har då den allmänna lösningen $\boldsymbol{X} = \Phi\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{X} = \Phi\boldsymbol{Q} = c_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} - 2te^{4t} + 2te^{2t} + e^{4t} \\ e^{2t} + 2te^{4t} + 2te^{2t} + e^{4t}. \end{pmatrix} \tag{14}$$

Vi stoppar in begynnelsevärden och löser för c_1, c_2 då blir vårt slutgiltiga svar

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} te^{4t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t} \tag{15}$$

□

Problem 10.1.18. Givet ekvationssystemet

$$x' = -6x + 2y \tag{16}$$

$$y' = -3x + y, \qquad \boldsymbol{X}(0) = (3, 4)^T \tag{17}$$

(a) Bestäm den allmänna lösningen och avgör om det finns några periodiska lösningar

(b) Finn lösningen som uppfyller begynnelsevilkoret

(b) Rita lösningen i planet, visa åt vilket håll kurvan går.

Lösning. **(a)** Vi börjar med att skriva om systemet på matrisform med $\boldsymbol{X} = (x, y)^T$

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}. \tag{18}$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$ med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1 = (1,3)^T, \boldsymbol{v}_2 = (2,1)^T$. Vi ser nu enkelt att den allmänna lösningen är

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 e^{-5t}.$$

Nu kanske man tänker att det inte ser ut som att någon X har några periodiska lösningar, men om man tänker till ordentligt och kollar på definitionen av periodisk funktion ser man att alla konstanta lösningar är periodiska.
(b) Sätter vi in begynnelsevärdena och löser får vi $c_1 = 1, c_2 = 1$

(c) Ni får rita själva :) □

Problem 10.1.25. Lös det plana autonoma systemet genom att byta till polära koordinater. Vi har två fall med olika begynnelsevilkor

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \tag{19}$$

$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2), \qquad \boldsymbol{X}(0) = (1,0), \boldsymbol{X}(0) = (2,-0). \tag{20}$$

Lösning. Vi börjar med att göra substitutionen som gör om problemet till polära koordinater

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{21}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \tag{22}$$

Vi skriver om systemet med och får

$$r' = r(1 - r^2) \qquad \theta' = 1. \tag{23}$$

Vi ser enkelt att $\theta = t + c_1$ och om vi skriver om ekvationen för r på standardform ser vi att det är en Bernoulli-ekvation, därför gör vi substitutionen $u = 1/r^2$.

$$\begin{gathered} r' - r = -r^3 \\ r' = \frac{-2}{u^3}u' \\ u' + 2u = 1 \\ u = c_2e^{-2t} + 1 \\ r = \frac{1}{\sqrt{1 + c_2e^{-2t}}} \end{gathered}$$

Om vi kollar på det första fallet där $\boldsymbol{X}(0) = (1,0)$ får vi att $r(0) = 1 \implies c_2 = 0$. Fall ett har alltså lösning

$$x = \cos t \qquad y = \sin t. \tag{24}$$

I det andra fallet med $\boldsymbol{X}(0) = (-2, 0)$ får vi $r(0) = 4 \Longrightarrow c_2 = \frac{-3}{4}$

$$x = \frac{\cos(t + \pi)}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2t}}} \qquad\qquad y = \frac{\sin(t + \pi)}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2t}}}$$

$\square$