SF1633 – Övning 4

Gustaf Bjurstam

bjurstam@kth.se

2022-09-09

Problem 8.2.5. Finn den allmänna lösningen till systemet

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \tag{1}$$

Lösning. Vi börjar med att hitta egenvärden till matrisen, som vi kallar A. Vi behöver alltså lösa ekvaitonen $\det(A - \lambda I) = 0$. Det ger upphov till den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + 2\lambda - 80 = 0. \tag{2}$$

Ekvationen (2) har lösningarna $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = 8$. Vi söker sedan vektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ sådana att

$$(A - \lambda_1 I)\, \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

$$(A - \lambda_2 I)\, \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

Vi väljer vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen är alltså

$$\boldsymbol{X} = c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{5}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} \tag{6}$$

□

Problem 8.2.7. Bestäm den allmänna lösningen till följande system

$$\begin{aligned} x' &= x + y - z \\ y' &= 2y \\ z' &= y - z \end{aligned}$$

Lösning. Vi börjar med att skriva om systemet med vektorer och matriser, vi kallar vektorn $\boldsymbol{X}$ och matrisen A.

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \tag{7}$$

Vi fortsätter på samma sätt som i **8.2.5** och söker egenvärden och egenvektorer till A. För att bestämma egenvärden till A ställer vi upp

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{underdeterminanter på nedersta raden ger} \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} - (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

$$2-\lambda-(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-1) = 0. \tag{10}$$

Vilket har lösningarna $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. När vi söker egenvektorer får vi $\boldsymbol{v}_1 = (2,3,1)^T, \boldsymbol{v}_2 = (1,0,2)^T, \boldsymbol{v}_3 = (1,0,0)^T$. Lösningen till systemet är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{v}_1 e^{2t} + c_2\boldsymbol{v}_2 e^{-t} + c_3\boldsymbol{v}_3 e^{-t} \tag{11}$$

□

Problem 8.2.23. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \tag{12}$$

Lösning. Matrisen har egenvärdet $\lambda = 2$ med multiplicitet 2. Egenvektorn tillhörande λ är $\boldsymbol{v} = (1,1)^T$. Första termen i den allmänna lösningen är alltså $\boldsymbol{v}e^{2t}$. Vi ska nu söka en vektor $\boldsymbol{u}$ sådan att

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Longrightarrow \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Vi har då den fullständiga lösningen

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{v}e^{2t} + c_2\left(\boldsymbol{v}te^{2t} + \boldsymbol{u}e^{2t}\right) \tag{14}$$

□

Problem 8.2.39. Finn den allmänna lösningen till

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \tag{15}$$

Lösning. Matrisen i (15) har den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 + 9 = 0$ med lösningarna $\lambda = \pm i$. Vi ställer upp för att hitta egenenvektor till $\lambda = 3i$.

$$\begin{pmatrix} 4-3i & -5 \\ 5 & -4-3i \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

Denna ekvation ser man ganska lätt att har en lösning $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix}$. Här ifrån finns det två sätt vi kan gå vidare, ett sätt som kräver lite kunskap om komplexa tal och de komplexa definitionerna av cos och sin, och ett sätt där vi får den reella lösningen på direkten (i den här kursen arbetar vi bara med reellvärda funktioner men det går ju faktiskt att arbeta med komplexvärda funktioner också. Jag kommer gå igenom båda sätten, börjar med raka vägen till den reella lösningen och så tar jag andra sättet sen för den mer matematikintresseerade.
Metod 1: Vi definierar två vektorer $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$. Vi definierar $\boldsymbol{b}_1$ som realdelen till egenvektorn $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{b}_2$ som imaginärdelen. Vi har alltså $\boldsymbol{b}_1 = (4,5)^T$ och $\boldsymbol{b}_2 = (3,0)^T$. Vi har då ett lösningsrum som spänns upp av de två funktionerna

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{b}_1 \cos(3t) - \boldsymbol{b}_2 \sin 3t \tag{17}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{b}_2 \cos(3t) + \boldsymbol{b}_1 \sin 3t \tag{18}$$

Den allmänna lösningen är då alltså

$$\boldsymbol{X} = c_1 \boldsymbol{X}_1 + c_2 \boldsymbol{X}_2. \tag{19}$$

Metod 2: Om man inte tycker om metod 1, kanske för att man tycker den är för bara fromler att följa, tycker man förhoppningsvis att det här är roligare och mer intuitivt. Jag uppmuntrar framförallt de som vill läsa master i **Tillämpad matematik** att räkna lite på det här iallafall under kursens gång. Det kommer vara guld värt att vara bekant med komplexa tal och funktioner när ni ska läsa **SF1632** efter det här!
I den här metoden går vi vidare precis som om vi hade haft reella egenvärden i början. Vi noterar att vektorn $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4-3i \\ 5 \end{pmatrix}$ är egenvektor till egenvärdet $\lambda = -3i$. Således är vår lösning, om vi inte begränsar oss till realvärda funktioner

$$\boldsymbol{X} = c_1 \boldsymbol{v} e^{3it} + c_2 \boldsymbol{u} e^{-3it}. \tag{20}$$

Enligt Eulers formel har vi $e^{3it} = \cos 3t + i \sin 3t$ och $e^{-3it} = \cos 3t - i \sin 3t$, för att $\boldsymbol{X}$ ska vara en realvärd funktion ska vi alltså hitta lämpliga c_1, c_2 så att imaginärdelen av funktionen ovan är noll. Eftersom $\boldsymbol{u}$ är den komplexa konjugatet till $\boldsymbol{v}$ är ett möjligt val $c_1 = c_2 = k_1$ med och ett annat är $c_1 = -c_2 = k_2 i$ med $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Med Eulers formel igen får vi då

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_1 &= k_1(\boldsymbol{v}e^{3it} + \boldsymbol{u}e^{-3it}) = k_1 \left(\begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} (\cos 3t + i \sin 3t) + \begin{pmatrix} 4-3i \\ 5 \end{pmatrix} (\cos 3t - i \sin 3t) \right) \\
&= k_1 \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 3t \right) \\
\boldsymbol{X}_2 &= k_2 i(\boldsymbol{v}e^{3it} - \boldsymbol{u}e^{-3it}) = k_2 i \left(\begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} (\cos 3t + i \sin 3t) - \begin{pmatrix} 4-3i \\ 5 \end{pmatrix} (\cos 3t - i \sin 3t) \right) \\
&= k_2 i \left(\begin{pmatrix} 6i \\ 0 \end{pmatrix} \cos 3t + \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} i \sin 3t \right) = -k_2 \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \sin 3t + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 3t \right)
\end{aligned}$$

Vilket är samma lösninger som vi fick med **Metod 1** om vi väljer $k_1 = 1/2$ och $k_2 = -1/2$ $\square$