SF1633 – Övning 3

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-09-01

Problem 4.1.17. Avgör om följande mängd funktioner är linjärt oberoende.

$$\left\{f_1(x) = 5, f_2(x) = \cos^2 x, f_3(x) = \sin^2 x\right\}$$

Lösning. Vi minns från algebran att vi en mängd (av vektorer) $\{\boldsymbol{v_1}, .., \boldsymbol{v_n}\}$ är linjärt beroende om det finns koefficienter $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ ej alla noll, sådana att

$$\alpha_1\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\boldsymbol{v_2} + ...\alpha_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}.$$

Notera att denna definition ej är specifik för de vektorrum vi studerat i algebran (dvs. $\mathbb{R}^n$), genom att betrakta våra funktioner f_n som vektorer i rummet av kontinuerliga (realvärda) funktioner kan vi använda definitionen ovan. Från *trigettan* ser vi att

$$\frac{1}{5}f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) = 0.$$

Därmed ser vi också att vår mängd av funktioner inte är linjärt oberoende. □

Problem 4.1.40. Är mängden av funktioner

$$\{f_1(x) = e^{x+2}, f_2(x) = e^{x-3}\}$$

linjärt beroende på $(-\infty, \infty)$?

Lösning. Vi använder samma definition som ovan och ser att

$$e^{-2}f_1 - e^3 f_2 = 0.$$

Funktionerna är alltså linjärt beroende. □

Problem 4.2.10. Givet en lösning $y_1(x)$, använd ordningsreduktion, eller formeln (5) (sida 133 i kursboken), för att hitta en andra lösning $y_2(x)$ till ODE:n

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \quad y_1(x) = x^2 \tag{1}$$

Lösning. Jag kommer att använda ordningsreduktion då jag finner formler tråkiga. Antag att y_2 är på formen $y_2 = uy_1$. Skriv om (1) på standardform och sätt in så erhåller vi

$$y_2'' + \frac{2}{x}y_2' - \frac{6}{x^2}y_2 = 0 \tag{2}$$

$$u\left(y_1'' + \frac{2}{x}y_1' - \frac{6}{x^2}y\right) + u''y_1 + u'\left(2y_1' + \frac{2}{x}y_1\right) = 0. \tag{3}$$

Eftersom y_1 är en lösning till (2) är första parentesen i (3) lika med 0. Vi sätter in det explicita uttrycket för y_1 och fortsätter

$$x^2u'' + 6xu' = 0 \tag{4}$$

Vi kan nu lösa (4) för u' med hjälp av separation av variabler. För tydlighets skull skriver jag $u' = p$

$$\int \frac{dp}{p} = -6\int \frac{1}{x}dx \tag{5}$$

$$\log p = -6\log x + c \tag{6}$$

$$p = c_1x^{-6} \tag{7}$$

$$u = \int pdx = c_2x^{-5} + c_3 \tag{8}$$

Vi kan välja $c_3 = 0$ (varför?) och $c_2 = 1$. För att erhålla y_2 multiplicerar vi med y_1 och får

$$y_2(x) = x^{-3} \tag{9}$$

□

Problem 4.2.20. Givet en lösning y_1 till den associerade homogena ekvationen, använd ordningsreduktion för att hitta en lösning y_2 den associerade homogena ekvationen till

$$y'' - 4y' + 3y = x, \quad y_1 = e^x \tag{10}$$

och en partikulärlösning y_p till (10).

Lösning. Vi gör som innan, antag $y_2 = uy_1$. Det följer att

$$u\left(y_1'' - 4y_1' + 3y'\right) + u''y_1 + u'(2y_1' - 4y_1) = 0 \tag{11}$$

$$u''e^x - 2u'e^x = 0 \tag{12}$$

$$u'' - 2u' = 0 \tag{13}$$

$$u' = ce^{2x}, \quad u = c_1e^{2x} \tag{14}$$

Välj $c_1 = 1$ och få $y_2 = e^{3x}$. För att få y_p använder vi variation av parametrar. Antag $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, vi får då och fortsätt enligt sidor 161-162 i kursboken.

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{och } u_2' = \frac{W_2}{W} \tag{15}$$

$$\text{där} \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ x & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & x \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Vi får alltså $u_1' = -\frac{x}{2}e^{-x}$ och $u_2' = \frac{x}{2}e^{-3x}$. Integrera och få

$$u_1 = \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$u_2 = -\frac{x}{6}e^{-3x} - \frac{1}{18}e^{-3x}$$

och slutligen är lösningen $y_p = \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$. □

Problem 4.6.11. Finn den allmänna lösningen med hjälp av variation av parametrar.

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x} \tag{17}$$

Lösning. Vi börjar med att finna lösningar till den associerade homogena ekvationen $y'' + 3y' + 2y = 0$. Vi gör ansatsen $y = e^{\lambda x}$ och får den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \tag{18}$$

Vi tar alltså $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x}$. Wronskianen blir då $W = -e^{-3x}$, och $W_1 = -e^{-2x}/(1+e^x)$, $W_2 = e^{-x}/(1 + +e^x)$. Således har vi

$$u_1' = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad u_2' = \frac{-e^{2x}}{1 + e^x} \tag{19}$$

$$u_1 = \log(e^x + 1), \quad u_2 = \log(e^x + 1) - e^x \tag{20}$$

Vi får då $y_p = (e^{-x} + e^{-2x}) \log(e^x + 1) - e^{-x}$ och slutligen är den almänna lösningen

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right) \log(e^x + 1) \tag{21}$$

□