SF1633 – Övning 10

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-10-02

Problem 7.2.5. Beräkna

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}. \tag{1}$$

Lösning. Vi beräknar helt enkelt

$$\frac{(s+1)^3}{s^4} = \frac{s^3+3s^2+3s+1}{s^4} = \frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{3}{s^3}+\frac{1}{s^4} \tag{2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{3}{s^3}+\frac{1}{s^4}\right\} = 1+3t+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3. \tag{3}$$

$\square$

Problem 7.2.27. Beräkna

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\}. \tag{4}$$

Lösning. Vi beräknar

$$\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)} = 2\frac{s-2}{s(s+1)(s^2+1)} = \frac{s+3}{s^2+1}+\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+1}+\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s}\right\} = \cos t + 3\sin t + 3e^{-t} - 4$$

$\square$

Problem 7.2.43. Använd laplacetranformen för att lösa differentialekvationen

$$2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \qquad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1. \tag{5}$$

Lösning. Vi transformerar både höger och västerled i (5) och får då

$$2(s^3\tilde{y}-1) + 3s^2\tilde{y} - 3s\tilde{y} + 2\tilde{y} = \frac{1}{s+1}$$

$$\tilde{y}(2s^3+3s^2-3s-2) = \frac{1}{s+1}+2$$

$$2\tilde{y}(s+\frac{1}{2})(s-1)(s+2) = \frac{1}{s+1}+2$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2(s+1)}+\frac{1}{9(s+2)}-\frac{8}{9(s+1/2)}+\frac{5}{18(s-1)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-2t}-\frac{8}{9}e^{-t/2}+\frac{5}{18}e^{t}.$$

$\square$

Problem 7.3.27. Använd laplacetranformen för att lösa differentialekvationen

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = -3. \tag{6}$$

Lösning. Vi transformerar båda led och erhåller

$$s^2\tilde{y} + 3 - 6s\tilde{y} + 13\tilde{y} = 0 \tag{7}$$

$$\tilde{y} = \frac{-3}{s^2 - 6s + 13} = \frac{-3}{(s-3)^2 + 4} \tag{8}$$

$$y(t) = -\frac{3}{2}e^{3t}\sin 2t. \tag{9}$$

□

Problem 7.3.57. Bestäm laplacetransformen till

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}. \tag{10}$$

Lösning. Vi börjar med att skriva om f som en produkt av distributioner.

$$f(t) = t^2 H(t-1) \tag{11}$$

Där H är Heavisidefunktionen, nu kan vi enkelt med hjälp av formelsamlingen bestämma $\tilde{f}(s)$ till

$$\tilde{f}(s) = e^{-s}\mathscr{L}\{(t+1)^2\} = e^{-s}\mathscr{L}\{t^2 + 2t + 1\} = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right). \tag{12}$$

□

Problem 7.3.69. Använd laplacetranformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1 \tag{13}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}. \tag{14}$$

Lösning. Transformerar vi båda led erhåller vi

$$\tilde{y}(s^2 + 1) = 1 + \tilde{f}. \tag{15}$$

För att bestämma $\tilde{f}$ skriver vi om f med hjälp av Heavisidefunktionen.

$$f(t) = H(t-\pi) - H(t-2\pi)$$

Eftersom laplacetransformen är linjär får vi enkelt $\tilde{f}(s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}$. Vi sätter in i (15)

$$\tilde{y} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s}\frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}\frac{1}{s^2+1}$$
$$y(t) = \sin t + (\sin t * H(t-\pi)) - (\sin t * H(t-2\pi)$$
$$y(t) = \sin t + H(t-\pi)\int_{\pi}^{t} \sin t dt - H(t-2\pi)\int_{2\pi}^{t} \sin t dt$$
$$y(t) = \sin t + H(t-\pi)(1+\cos t) + H(t-2\pi)(-1+\cos t)$$

$\square$