SF1633 – Övning 1

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2022-08-25

Problem 1.1.3. Bestäm ordningen av och huruvida differentialekvationen är linjär.

$$t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0 \tag{1}$$

Lösning. Vi kan skriva om (1) som

$$t^5 \frac{d^4 y}{dt^4} - t^3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6y = 0. \tag{2}$$

Nu är det (kanske) enklare att se att ekvationen är av ordning 4 eftersom det är den högsta ordningens derivata som ingår i ekvationen är 4. Eftersom alla termer där någon derivata (även nollte derivata) är linjära i termer av y är ekvationen linjär. □

Problem 1.1.5. Bestäm ordningen av och huruvida differentialekvationen är linjär.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{3}$$

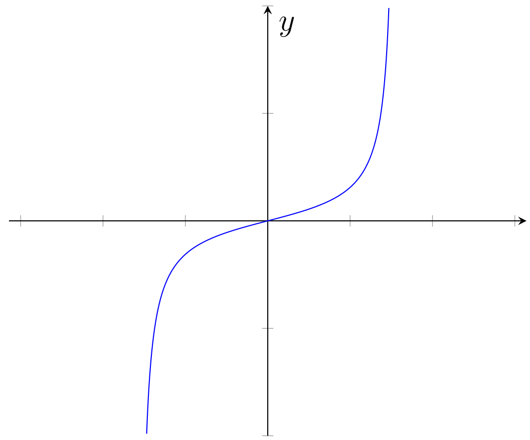
Lösning. Med samma resonemang som innan ser vi att ordningen av ekvationen är 2. Eftersom $\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ inte är en linjär funktion med avseende på dy/dx ser vi att differentialekvationen är ickelinjär. □

Problem 1.1.62. Betrakta differentialekvationen $y' = y^2 + 4$.
(a) Förklara varför det inte finns några konstanta lösningar till differentialekvationen.

(b) Beskriv grafen för en lösning $y = \varphi(x)$. Kan lösningen ha några lokala extrempunkter?

Lösning. **(a)**Eftersom vi jobbar med reellvärda funktioner (dvs. reella värden på y) kommer $y' \geq 4$ överallt. Eftersom konstanta funktioner inte kan ha en nollskiljd derivata kan vi inte ha några konstanta lösningar till differentialekvationen.
(b) Eftersom derivatan är positiv (> 0) överallt är måste φ vara strängt växande överallt,

vi kan med andra ord utesluta lokala extrempunkter. Dessutom vet vi att y' blir stort för stora $|y|$ och litet för små $|y|$. Därför bör grafen se ut något som nedan.



$\square$

Problem 1.2.15. Bestäm minst två lösningar till begynnelsevärdesproblemet

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{4}$$

Lösning. En trivial konstant lösning är $y(t) = 0$. En andra lösning är svårare att hitta. Vi noterar att $(x^3)^{2/3} = x^2$ och att $D_x(x^3) = 3x^2$. Det verkar som att en andra lösning skulle kunna vara $y(t) = ct^3$, där c är någon godtycklig konstant. Vi testar vår lösning genom att derivera uttrycket, och kolla begynelsevärdet

$$\begin{aligned} D_t(ct^3) = 3ct^2 \text{ Detta är alltså ok om } c = 1 \\ y(0) = c0^3 = 0 \text{ detta med.} \end{aligned}$$

Alltså är $y(t) = t^3$ en lösning. $\square$

Problem 1.3.3. I denna uppgift ska vi bestämma en matematisk modell för att beskriva hur en population $P(t)$ beror av tiden t. I denna modell är det givet att barnafödandet är proportionerligt mot populationen och dödstalen mot populationen i kvadrat.

Lösning. Vi börjar med att uttrycka födelsetalen P_{in} och dödstalen P_{ut}

$$\begin{aligned} P_{in} &= c_1 P \\ P_{ut} &= c_2 P^2. \end{aligned}$$

Vi är intresserade av totala populationsändringen, det vill säga nettoflödet $P' = P_{in} - P_{ut}$.

$$\frac{dP}{dt} = c_1 P - c_2 P^2 \tag{5}$$

$\square$

Fundera på: Fixera c_1, c_2 (det vill säga välj värden), hitta vid vilken (nollskiljd) population lösningen blir konstant.

Problem 2.1.25. Finn alla kritiska punkter och fasporträtt till den autonoma första ordningens differentialekvationen

$$y' = y^2(4 - y^2). \tag{6}$$

Klassificera varje kritisk punkt som asymptotiskt stabil, instabil, eller semi-stabil.

Lösning. De kritiska punkterna är $y = 0, 2, -2$. Vi kollar tecknet på derivatan emellan de kritiska punkterna, förslagsvis $y_1 = -3, y_2 = -1, y_3 = 1, y_4 = 3$.

$$\begin{aligned} y'(-3) &= 9(4-9) = -45 \\ y'(-1) &= 1(4-1) = 3 \\ y'(1) &= 1(4-1) = 3 \\ y'(3) &= 9(4-9) = -45 \end{aligned}$$

Vi ser att derivatan är negativ under $y = -2$ och positiv över, det vill säga att i båda fallen rör sig kurvan bort från den kritiska punkten, $y = -2$ är en instabil kritisk punkt. Samma resonemang så ser vi att kurvan närmar sig $y = 0$ underifrån men inte ovanifrån, därav drar vi slutsatsen att $y = 0$ är semistabil. Till sist ser vi att kurvan närmar sig $y = 2$ både underifrån och nedanifrån, därav är $y = 2$ asymptotiskt stabil. Jag lämnar ritandet till er. □

Problem 2.2.17. Lös följande differentialekvation med separation av variabler

$$\frac{dP}{dt} = P - P^2$$

Lösning. Vi börjar med att notera jämnnviktslösningarna $P = 0$ och $P = 1$. Antag nu att $P \neq 0, 1$ (vi försäkra oss om att vi inte dividerar med noll). Vi skriver om ekvationen och integrerar på båda sidor

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = P - P^2 \iff \frac{dP}{P(1-P)} &= dt \\ \int \frac{1}{P(1-P)} dP &= \int dt \\ \int \frac{1}{P} - \frac{1}{P-1} dP &= t + C \\ \log\left|\frac{P}{P-1}\right| = t + C \implies \frac{P}{1-P} = -1 + \frac{1}{1-P} &= ce^t \\ P = (1-P)ce^t \implies P(t) &= \frac{ce^t}{1+ce^t} \end{aligned}$$

□

Problem 2.2.43. Varje första ordningens autonoma differentialekvatoion $\frac{dy}{dx} = f(y)$ är separabel. Finn explicita lösningar y_1, y_2, y_3, y_4 som uppfyller

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = \frac{1}{2}, \quad y_3(0) = \frac{-1}{2}, \quad y_4(0) = -2. \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dx} = y - y^3 \tag{8}$$

Rita lösningarna (lämnar jag till er), och ange definitionsintervallet I_n för varje lösning.

Lösning. Vi börjar med att skriva om (8) och sätta integrationstecken framför

$$\int \frac{dy}{y(1-y^2)} = \int \frac{dy}{y(1-y)(1+y)} = \int dx \tag{9}$$

$$\log|y| - \frac{1}{2}\log|y+1| - \frac{1}{2}\log|y-1| = x + C \tag{10}$$

$$\frac{|y|}{\sqrt{|y^2-1|}} = ce^x \tag{11}$$

$$\frac{y^2}{|y^2-1|} = c_1 e^{2x} \tag{12}$$

$$y^2 = |y^2-1|ce^{2x} \tag{13}$$

$$y^2 = \frac{\pm ce^{2x}}{1 \pm ce^{2x}} \tag{14}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{|c|}e^x}{\sqrt{|1 \pm ce^{2x}|}} \tag{15}$$

Jag löser för y_1 och y_4, y_2, y_3 lämnar jag åt er. Sätt $x = 0, y = \pm 2$

$$\pm 2 = \pm\sqrt{|c|}/\sqrt{|1 \pm c|} \implies 4 = \left|\frac{c}{1 \pm c}\right|$$

$$\implies y = \pm\frac{2e^x}{\sqrt{4e^{2x} - 3}}$$

Välj tecken beroende på om vi löser för y_1 eller y_4. I båda fall är defintionsmängden $I_{1,4} = \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}\right), \infty\right)$. (Vi får inte ha negativt under rottecknet eller noll i nämnaren). $\square$

Problem 2.3.5. Finn den allmänna lösningen till ODE:n, ange också det största intervallet I där lösningen är definierad. Avgör om det finns några försvinnande termer.

$$y' + 3x^2y = x^2 \tag{16}$$

Lösning. Det här är ett ypperligt tillfälle att träna på integrerande faktor. En antiderivata till $3x^2$ är x^3. Vi multiplicerar (16) med e^{x^3} och erhåller

$$y'e^{x^3} + y3x^2e^{x^3} = x^2e^{x^3} \tag{17}$$

$$D_x(ye^{x^3}) = x^2e^{x^3} \tag{18}$$

$$ye^{x^3} = \int x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c \tag{19}$$

$$y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3} \tag{20}$$

Lösningen är definierad på hela reella axeln och ce^{-x^3} är en försvinnande term. □

Problem 2.3.57. Följande system av differentialekvationer beskriver radioaktivt sönderfall av en speciellt sorts radioaktiva ämnen

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x \tag{21}$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y \tag{22}$$

Där λ_1, λ_2 är konstanter. Fundera över hur du skulle lösa det här systemet under begynnelsevärdena $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

Lösning. Den här modellen beskriver hur ett radioaktivt ämne A förfaller till B och hur B samtidigt förfaller till C. $A \to B \to C$. I modellen är x mängden av A och y mängden av B. Eftersom x' bara beror av mängden A kan vi först finna en explicit lösning av (21) och sedan sätta in denna i (22). En lösning till (21) är $x(t) = x_0e^{-\lambda_1 t}$, vi sätter in denna i (22) och skriver om på standardform.

$$y' + \lambda_2 y = \lambda_1 x_0 e^{-\lambda_1 t}$$

Vi kan nu tillämpa integrerande faktor för att lösa för y.

$$D_t(ye^{\lambda 2t}) = \lambda_1 x_0 e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$ye^{\lambda 2t} = \frac{\lambda_1 x_0 e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)}}{\lambda_2 - \lambda_1} + C$$

Sätt in begynnelsevilkoren och lös

$$y_0 = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + C$$

Lösningen till systemet är alltså

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$y(t) = \frac{\lambda_1 x_0 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \left(y_0 - \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) e^{-\lambda_2 t}$$

□