SF1632 – Övning 3

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2023-05-13

Problem 7.1 (V). Beräkna Fouriertransformen av följande funktioner, om de existerar

(a) $f(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(c) $\sin t$.

Lösning. **(a)**

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{1} te^{-i\omega t}dt = \big\{\text{partiell integration}\big\}$$
$$= \left|\frac{ite^{-i\omega t}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\right|_{-1}^{1} = 2i\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}$$

(c) $\sin t \notin L^1(\mathbb{R})$ alltså existerar ej Fouriertransformen av $\sin t$ □

Problem 7.4 (V). Antag $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, antag $f \in L^1(\mathbb{R})$ och $g(t) = f(at)$. Uttryck $\hat{g}$ i termer av $\hat{f}$.

Lösning.

$$\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{\mathbb{R}} f(at)e^{-i\omega t}dt = \{u = at\}$$
$$= \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i\omega u/a}dt = \frac{\hat{f}(\omega/a)}{|a|}.$$

□

Problem 7.14 (V). Antag att f är deriverbar och har Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1 + i\omega}{1 + \omega^6}.$$

Beräkna $f'(0)$. (Notera att inget uttryck för $f(t)$ behövs)

Lösning. Vi utgår från Fouriertransformens egenskap i förhållande till f' och inversionformeln för Fouriertransformen

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega\hat{f}(\omega)$$
$$f'(0) = \mathcal{F}^{-1}[i\omega\hat{f}(\omega)](0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\omega\frac{1 + i\omega}{1 + \omega^6}e^{i\omega 0}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{-\omega^2}{1 + \omega^6}d\omega = \frac{-1}{6\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1 + u^2}du = \frac{-1}{6}.$$

□

Problem 7.18 (V). Bestäm en lösning till integralekvationen

$$\int_{\mathbb{R}} f(t-y)e^{-|y|}dy = \frac{4}{3}e^{-|t|} - \frac{2}{3}e^{-2|t|}. \tag{1}$$

Lösning. Låt $g(t) = e^{-|t|}$, då är vänsterledet i (1) en faltning $f * g(t)$. Fouriertransformera båda led och använd faltningsformeln

$$\begin{aligned} &\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}\Big[\frac{4}{3}e^{-|t|} - \frac{2}{3}e^{-2|t|}\Big](\omega) \\ =&\hat{f}(\omega)\frac{2}{1+\omega^2} = \frac{4}{3}\frac{2}{1+\omega^2} - \frac{1}{3}\frac{2}{1+(\omega/2)^2} \\ &\implies \hat{f} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\frac{1+\omega^2}{4+\omega^2} = \frac{4}{3}\Big(1 - \frac{4+\omega^2}{4+\omega^2} + \frac{3}{4+\omega^2}\Big) = \frac{4}{4+\omega^2}. \end{aligned}$$

När vi bestämt $\hat{f}$ kan vi helt enkelt invertera $\hat{f}$ för att bestämma f. Kolla tillbaka på tidigare beräkningar så ses ganska enkelt att $f(t) = e^{-2|t|}$. □

Problem 7.22 (V). Låt $f \in L^1(\mathbb{R})$ vara sådan att f' är kontinuerlig och $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Finn en funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ sådan att

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{u-t}g(u)du + f'(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Lösning. Börja med att notera

$$\int_{-\infty}^{t} f(u-t)g(u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u-t)\big(1 - H(u-t)\big)g(u)du.$$

Vi kan då omformulera (2) i termer av faltning

$$g(t) = (e^t(1 - H(t)) * g(t) + f'(t). \tag{3}$$

Fouriertransformera båda led och fortsätt som innan.

$$\begin{aligned} &\hat{g} = \hat{g}\frac{1}{1-i\omega} + i\omega\hat{f} \\ \implies &\hat{g} = (i\omega - 1)\hat{f}(\omega) \\ \implies &g(t) = f'(t) - f(t). \end{aligned}$$

□

Problem 7.26 (V). Lös värmeledningsekvationen i en oändligt lång stång om vid $t = 0$ temperaturdistrubutionen kan beskrivas av $e^{-x^2} + e^{-x^2/2}$.

Lösning. Vi har alltså PDE:n

$$u_t = u_{xx}, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$u(x,0) = e^{-x^2} + e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Man kan se att (4) är separabel men vi kan inte bestämma lösningar som fourierserier eftersom vi har ett oändligt intervall för x och inga randvillkor. Istället kan vi fouriertransformera $u(x,t)$ i x-dimensionen. Det vill säga låt

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}_x[u(x,t)](\omega, t).$$

Fouriertransformera båda led av (4) så ser vi att

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\omega^2 U, \\ U(\omega, 0) &= \mathcal{F}_x[e^{-x^2} + e^{-x^2/2}](\omega) := \hat{f}. \end{aligned}$$

Det här kan lösas som vilken ordinär differentialekvation som helst

$$U(\omega, t) = \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t} = \sqrt{\pi}\big(\sqrt{2}e^{-\omega^2(t+1/2)} + e^{-\omega^2(t+1/4)}\big). \tag{6}$$

Nu kommer vi alltså hitta vår lösning till (4+5) genom att bara invertera (6).

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2+4t}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(\frac{-x^2}{1+4t}\right).$$

□

Problem Linköping. Bestäm en lösning till ODE:n

$$y'' + ty' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lösning. Fouriertransformera alltihop

$$\begin{aligned} &-\omega^2 \hat{y}(\omega) + i\frac{d}{d\omega}(i\omega\hat{y}) + \hat{y} = 0 \\ &-\omega^2\hat{y} - \omega\hat{y}' = 0 \\ &\hat{y}' = -\omega\hat{y} \\ &\hat{y} = c_0 e^{-\omega^2/2} \end{aligned}$$

$$y = e^{-t^2/2}$$

□