

SF1632 – Övning 2

Gustaf Bjurstam

bjurstam@kth.se

2023-04-24

Problem 40.1 (S). Bestäm egenvärdena λ_n och egenfunktionerna y_n till följande problem.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

(d) $y(0) = y(L) = 0$, och (e) $y(-L) = y(L) = 0$

Lösning. Allmänt har ekvationen (1) lösningar på formen

$$y(t) = ae^{\sqrt{-\lambda}t} + be^{-\sqrt{-\lambda}t}. \quad (2)$$

(d) Antag $\lambda \leq 0$, då tvingar randvilkoren oss till den ointressant lösningen $y = 0$. Antag då istället $\lambda = \alpha^2 > 0$. Då leder randvilkoren till följande ekvationer

$$a = -b \quad (3)$$

$$ae^{i\alpha L} = -be^{-i\alpha L}. \quad (4)$$

Vi kan skriva om (4) som $ae^{2i\alpha L} = -b$ och nu dra slutsatsen $\alpha_n = \frac{\pi n}{L}$. Slutligen så har vi egenvärdena och egenfunktionerna

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad y_n = e^{\pi i n t / L} - e^{-\pi i n t / L} \simeq \sin \frac{\pi n t}{L}.$$

(e) Med samma argument som ovan antar vi $\lambda = \alpha^2 > 0$. Randvilkoren leder då till

$$ae^{i\alpha L} + be^{-i\alpha L} = 0$$

$$ae^{-i\alpha L} + be^{i\alpha L} = 0$$

Ekvationerna kan skrivas om som $(a + b) \cos \alpha L = 0 = (a - b) \sin \alpha L$. Vi har lösningarna $a_1 = -b_1, \alpha_1 = \pi n / L$ och $a_2 = b_2, \alpha_2 = \pi / 2L + \pi n / L$. Det kan sammanfattas som

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{4L^2}, \quad y_n = \sin \frac{n\pi(x + L)}{2L}.$$

□

Problem 6.3 (V). Bestäm en lösning till värmeledningsproblemet

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \quad (5)$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 + \cos 3x), \quad 0 < x < \pi. \quad (7)$$

Lösning. Vi börjar med att separera variabler, ansätt $u = XT$. det leder till systemet av ordinära differentialekvationer

$$X'' = \lambda X \quad (8)$$

$$T' = \lambda T. \quad (9)$$

Vilket har lösningarna $T = e^{\lambda t}$ och $X = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$. (6) Implicerar att $B = 0$ och $\lambda = -n^2$. Genom att matcha koefficienter mot (7) får vi lösningen

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (1 + e^{-9t} \cos 3x).$$

□

Problem Ex 6.3 (V). Betrakta värmeledning i en stång med inbyggd uppvärmning. Modell beskrivs av följande BVP:

$$u_t = u_{xx} + \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \quad (10)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad (11)$$

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < \pi. \quad (12)$$

Bestäm en lösning.

Lösning. Det här är ett ickehomogent problem och därför går det inte att göra variabelseparation. Vi försöker homogenisera problemet genom att sätta $u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$. Substituera det här in i (10) och (11). Det vore trevligt att ha

$$\varphi''(x) = -\sin \frac{x}{2}, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

Dessa två villkor leder till $\varphi(x) = 4 \sin(x/2) - \pi x/4$. Nu skall alltså v vara en lösning till problemet

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(0, t) &= v(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= 1 - 4 \sin \frac{x}{2} + \frac{4x}{\pi}, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Det här nya problemet är separabelt och homogent så vi kan lösa det med våra vanliga metoder. Jag tänker att sista stegen är bra övning för er så ni får själva göra beräkningarna. lösningen är till sist

$$u(x, t) = 4 \sin \frac{x}{2} - \frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1 - (-1)^n(4n^2 - 5)}{n(4n^2 - 1)} \sin nx.$$

□

Problem 6.13 (V). Bestäm en lösning till Dirichletproblemet i enhetsdisken sådant att $u(x, y) = x^4 + y^4$ på diskens rand (dvs då $x^2 + y^2 = 1$).

Lösning. Vi ska lösa ekvationen $\Delta u = 0$ på enhetsdisken. $\Delta u = 0$ innebär att u är harmonisk. Det innebär att u är realdelen till en analytisk komplex funktion $f(z) = f(x + iy) = f(re^{i\theta})$. Att f är analytisk innebär att f kan skrivas på formen $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n = \sum_{n \geq 0} c_n r^n e^{in\theta}$. Realdelen av f kan då skrivas $\sum r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. För att uppfylla randvillkoret sätter vi in $r = 1$.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta.$$

Bestäm fourier koeficienterna som vanligt så är vi klara sen! Båda termerna i högerledet är jämna, vi kan därför enkelt säga $b_n = 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) d\theta = \frac{3}{2}, \\ a_n &= 0, \quad n \neq 4, 0 \\ a_4 &= \frac{1}{4} \\ u(r, \theta) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} r^4 \cos 4\theta \end{aligned}$$

Notera: $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2 \sin x \cos x)^2 = \frac{x^4 + y^4 - 6x^2y^2}{r^4}$

$$u(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} (x^4 + y^4 - 6x^2y^2).$$

□

Problem (Linköping). Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 + 2x - \sin 2\pi x, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 1, u(1, t) = 3, & t \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Lösning. Problemet har inhomogena randvillkor, vi vill åtgärda det på samma sätt som vi gjorde tidigare. Ansätt $u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$. På $\varphi(x)$ ställer vi kraven

$$\varphi''(x) = 0, \quad \varphi(0) = 1, \varphi(1) = 3. \quad (14)$$

Dessa krav leder till $\varphi(x) = 1 + 2x$. Nu kan vi lösa det homogena problemet

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = -\sin 2\pi x, & 0 \leq x \leq 1 \\ v(0, t) = 0, v(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Som har lösning $v(x, t) = -e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$. Slutligen är lösningen till (13)

$$u(x, t) = 1 + 2x - e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x.$$

□