SF1632 – Övning 1

Gustaf Bjurstam
bjurstam@kth.se
2023-04-03

Det som står här nedan är det jag gick igenom i höstas när vi pratade om fourierserier och inre produktrum i SF1633, jag gjorde den genomgången för industriell ekonomi med ganska mycket utblick mot den här kursen så det bör kunna vara relevant även nu. Längre ner finns lösa uppgifter, vill ni ha tillgång till mina anteckningar från SF1633 är det bara att säga till.

Inre produktrum

Jag vill börja med att berätta lite om det som kallas L^2-teori och inre produktrum, om ni läser **SF1632** kommer dessa ämnen behandlas djupare. I övning 3 berättade jag kort om hur vi kan behandla funktioner definierade på något intervall I som vektorer i ett vektor rum, vi definierade linjärt beroende på ett analogt sätt som i algebran. Vi vill nu försöka hitta något som liknar det viktiga konceptet skalärprodukt. Vi börjar med att visa att skalärprodukten som den definieras i $\mathbb{R}^n$ inte är sofistikerad nog för att kunna direkt användas i $\mathbb{C}^n$. I antag att $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, vi definierar beloppet av $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ som $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}$, och säger att längden av vektorn är samma sak som beloppet. Om vi testar samma definition av längd på vektorn $\boldsymbol{v} = (1, i) \in \mathbb{C}^2$ får vi att $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2 + i^2} = 0$. Det betyder alltså att vektorn $\boldsymbol{v}$ skulle ha längd 0, och det verkar ju absurt, vi behöver istället en bättre definition. Vi introducerar, för ett komplext vektorrum begreppet inre produkt. Om vi har ett vektorrum V med $u, v \in V$ är den inre produkten en funktion $\langle u, v\rangle$ har följande egenskaper

- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ (Hermitisk symmetri)
- $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, q\rangle + \beta\langle v, w\rangle$ (Linjäritet i första argumentet)
- $\langle u, u\rangle \geq 0$
- $\langle u, u\rangle = 0 \implies u = 0$.

Vi väljer alltså att definiera den inre produkten $\langle u, v\rangle$ på $\mathbb{C}^n$ som $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}$ (Kolla gärna att denna definition stämmer uppfyller kraven ställda på en inre produkt). Vad var poängen med att jag berättar allt det här för er kanske ni undrar? Det är för att vi ska definiera en inre produkt på rummet av funktioner definierade på intervallet $[a, b]$. Vi definierar rummet $L^2([a, b])$ som mängden funktioner definierade på $[a, b]$ som uppfyller

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Den inre produkten till $L^2([a,b])$ definierar vi som

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1}$$

Notera att om f, g är reellvärda funktioner behövs inte konjugattecknet. Vi är nu redo att definiera konceptet ortogonala funktioner, i $\mathbb{R}^n$ definierar två vektorer u, v som ortogonala om $u \cdot v = 0$, vi säger att två funktioner f, g ortogonala i $L^2([a,b])$ om $\langle f, g\rangle = 0$. Av särskilt intresse är att vi precis som i $\mathbb{R}^n$ kan använda Gram-Schmidt för att projicera funktioner på underrum av $L^2([a,b])$.

Vad är en Fourierserie?

Sats 1. *Mängden* $\{\cos nx, \sin nx\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([-\pi,\pi])$ *är en ortogonal mängd.*

Bevis. Låt $n, m \in \mathbb{N}$ med $n \neq m$, vi beräknar $\langle \cos nx, \cos mx\rangle$ och övriga intressanta inre produkter

$$\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\, dx = 0 \tag{2}$$

$$\langle \cos nx, \sin nx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx = 0 \tag{3}$$

$$\langle \cos nx, \sin mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m-n)x) + \sin((n+m)x)\, dx = 0 \tag{4}$$

$$\langle \sin nx, \sin mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) - \cos((n+m)x)\, dx = 0. \tag{5}$$

□

Det som är trevligt med en ortogonal mängd är att det är mycket lätt att göra projektioner på det underrum som mängden spänner upp. Låt $V_N \subset L^2([-\pi,\pi)]$ vara det underrum som spänns upp av de trigonometriska polynomen av grad $\leq N$, vi kan då projicera vilken funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ på V_N med formeln

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{6}$$

där

$$a_n = \frac{\langle f, \cos nx \rangle}{\langle \cos nx, \cos nx \rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad \text{och} \tag{7}$$

$$b_n = \frac{\langle f, \sin nx \rangle}{\langle \sin nx, \sin nx \rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad \text{och} \tag{8}$$

$$a_0 = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \tag{9}$$

I **SF1632** kommer ni att få bevisa följande sats

Sats 2. *För varje givet $\varepsilon > 0$ och varje givet $f \in L^2([-\pi, \pi])$ existerar det N sådant att det existerar $v \in V_N$ som uppfyller $\langle f - v, f - v \rangle < \varepsilon$.*

När vi låter $N \to \infty$ konvergerar alltså (6) mot funktionen f, vi kallar serien för *Fourierserien* till f.

Lösta Uppgifter

Följande uppgifter är delvis tagna ur Vretblads *Fourier Analysis and Its Applications*, indikerat med (V), som var den gamla kurslitteraturen i SF1632, och delvis ur den nuvarande kurslitteraturen.

Problem 5.6 (V). Bevisa följande formel för den inre produkten

$$4\langle u, v \rangle = ||u + v||^2 + i||u + iv||^2 - ||u - v||^2 - i||u - iv||^2. \tag{10}$$

Lösning. Det här primärt en övning i att utnyttja den inre produktens egenskaper, vi börjar med att expandera högerledet i (10):

$$\begin{aligned}
&||u + v||^2 + i||u + iv||^2 - ||u - v||^2 - i||u - iv||^2 \\
=&\langle u + v, u + v \rangle + i\langle u + iv, u + iv \rangle - \langle u - v, u - v \rangle - i\langle u - iv, u - iv \rangle \\
=&\langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle + i\langle u, u + iv \rangle - \langle v, u + iv \rangle - \langle u, u - v \rangle + \langle v, u - v \rangle - i\langle u, u - iv \rangle - \langle v, u - iv \rangle \\
=&\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + i\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + i\langle v, v \rangle - \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle \\
&- i\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle - i\langle v, v \rangle \\
=&4\langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

□

Problem 5.7 (V). Bestäm det polynom p av grad högst 1 som minimerar $\int_0^2 |e^x - p(x)|^2 dx$.

Lösning. Att bestämma p är detsamma som att projicera $e^x \in L^2([0,2])$ på underrummet $V \subset L^2([0,2])$ som spänns upp av polynomen av grad 1 eller lägre. Den här typen av uppgift har åtminstone tidigare varit väldigt vanlig på tentorna. Stegen är som följer:

1. Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för V med hjälp av Gram-Schmidt

2. Projicera varje funktionen på varje vektor i $\mathcal{B}$

3. Summera resultaten

Vi väljer $\varphi_1 = 1/\sqrt{2}$ som första vektor, för att bestämma den andra beräknar vi

$$\varphi_2 = x - \frac{\langle x, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}\varphi_1 = x - \frac{1}{2}\int_0^2 x dx = x - 1.$$

Vi bestämmer sedan också $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 2/3$. Nu skall vi beräkna följande

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{\varphi_1}(e^x) &= \frac{\langle e^x, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}\varphi_1 = \frac{1}{2}\int_0^2 e^x dx = \frac{e^2-1}{2} \\ \mathrm{proj}_{\varphi_2}(e^x) &= \frac{\langle e^x, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}\varphi_2 = \frac{3}{2}(x-1)\int_0^2 (x-1)e^x dx = 3(x-1) \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis blir $p(x) = \frac{e^2-1}{2} + 3(x-1)$. □

Problem 4.1 (V). Bevisa formlerna $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ för $n \geq 0$ och $b_0 = 0$.

Bevis. Vi bevisar formlerna genom att sätta de två representationerna för fourierserien till f lika med varandra

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Sedan använder vi Eulers formel för att skriva om högerledet

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\big(\cos nx + i \sin nx\big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(c_n\big(\cos nx + i\sin nx\big) + c_{-n}\big(\cos nx - i \sin nx\big)\Big) \\ =& 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((c_n + c_{-n})\cos nx + (c_n - c_{-n})i \sin nx\Big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned}$$

För varje $n \geq 1$ löses ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_n + c_{-n} = a_n \\ (c_n + c_{-n})i = b_n. \end{cases}$$

Vilka har lösningarna som anges i formeln ovan. □

Problem 2.6.2 (PZ). Låt $f \in E$ och låt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

beteckna fourierserien till f på $[-\pi, \pi]$. Beräkna

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$$

i termer av a_n, b_n.

Lösning. Jag väljer att istället betrakta den alternativa representationen av fourierserien $f(x) \sim \sum c_n e^{inx}$. Då inses enkelt att fourierserien till $g(x) := f(x+\pi) - f(x)$ ges av

$$g(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (e^{inx + in\pi} - e^{inx}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n ((-1)^n - 1) e^{inx}.$$

För att beräkna $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dx$ använder vi nu Parsevals formel

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 2|c_0|^2 + 2 \sum_{n \geq 1} \left(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 \right) (1 - (-1)^n) \tag{11}$$

För att erhålla svaret i termer av a_n, b_n kan ni använda formlerna som visades gälla i **Problem 4.1**. □

Problem (Linköping). Antag att funktionen f är två gånger kontinuerligt deriverbar med perioden 2π. Visa att $\lim_{n \to \infty} n^2 c_n = 0$. Visa vidare att fourierserien för f är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$.

Lösning. Att $f \in C^2$ innebär att f'' är kontinuerlig, vilket innebär att fourierserien till f'' är punktvis konvergent på hela $\mathbb{R}$. Givet att $f \sim \sum c_n e^{inx}$ och $f'' \sim \sum d_n e^{inx}$ kan vi visa att

$$2\pi d_n = \int_{\boldsymbol{T}} f'' e^{inx} dx = \left| e^{inx} f' \right|_{\boldsymbol{T}} - \left| ine^{inx} f \right|_{\boldsymbol{T}} - n^2 \int_{\boldsymbol{T}} e^{inx} f(x) dx.$$

Tackvare periodiciteten och kontinuiteten för f och f' blir de första två termerna i högerledet noll och vi har kvar $d_n = -n^2 c_n$. Eftersom fourierserien för f'' är konvergent måste det gälla att $d_n \to 0$ när $n \to \infty$, vilket är ekvivalent med påståendet vi skulle bevisa. □
Nedan följer bevis för påståendet om likformig konvergens på $\mathbb{R}$.
Givet något $\varepsilon > 0$ behöver vi visa att det existerar $N \in \mathbb{N}$ sådant att $|\sum_{|n| \geq N} c_n e^{inx}| < \varepsilon$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Vi börjar med att utnyttja triangelolikheten

$$\left| \sum_{|n| \geq N} c_n e^{inx} \right| \leq \sum_{|n| \geq N} |c_n e^{inx}| \leq \sum_{|n| \geq N} |c_n|.$$

Enligt det vi tidigare bevisade vet vi att det existerar N sådant att för något $M \in \mathbb{R}^+$ sådant att $|c_n| < \frac{M}{n^2}$ för alla $|n| \geq N$. Då vet vi alltså att

$$\left| \sum_{|n| \geq N} c_n e^{inx} \right| \leq 2 \sum_{n \geq N} \frac{M}{n^2}.$$

Eftersom den högra serien sedan tidigare är känt konvergent måste det finnas ett sådant N vi söker, därmed är påståendet bevisat. □

Problem 4.16 (V). Bestäm alla a sådana att $y''(t) + ay(t) = y(t+\pi), t \in \mathbb{R}$, har en lösning med period 2π som inte är identiskt 0. Bestäm vidare alla sådana lösningar.

Lösning. Eftersom y är 2π-periodisk vet vi att y måste ha en fourierserie på formen $\sum c_n e^{inx}$. Genom denna ansats kan vi identifiera koefficienterna c_n genom att för varje n lösa ekvationen

$$-n^2 c_n + ac_n = (-1)^n c_n \iff c_n \left(a - n^2 - (-1)^n\right) = 0.$$

Eftersom vi inte får ha y identiskt 0 måste det finnas n sådant att $c_n \neq 0$, vilket betyder att a måste kunna skrivas $a = n^2 + (-1)^n$. För sådana a har vi $y = Ae^{inx} + Be^{-inx}$. □